

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

бакалавра

на тему **«Системи функцій Чебишова і їх
використання для розв’язання задачі
керованості»**

Виконав: студент групи МП41,
спеціальність
113 – Прикладна математика,
освітньо-професійна програма
«Прикладна математика»

Носик В. С.

Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук,
доцент,
професор кафедри
прикладної математики

Ігнатович С. Ю.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник
Фізико-технічного інституту
низьких температур
ім. Б.І. Веркіна
Національної академії
наук України
Халіна К. С.

Анотації

Носик Віталій Сергійович. Системи функцій Чебишова і їх використання для розв'язання задачі керованості. У цій роботі досліджено Т-системи (системи Чебишова), які мають багато застосувань в задачах наближення функцій, оптимізації, оптимального керування та інших. Особливу увагу приділено лемі, яка встановлює достатні умови невинродженості матриці, пов'язаної з двома Т-системами, та її доведенню. Далі показано, як можна використати цю лему для побудови керування, що переводить задану точку в задану для майже лінійної керованої системи.

Ключові слова: система Чебишова, задача керованості, майже лінійна керована система.

Nosyk Vitalii. Chebyshev functions systems and their application to solving the controllability problem. In this paper, we study T-systems (Chebyshev systems), which have many applications in function approximation, optimization, optimal control, and other problems. Particular attention is paid to the lemma that establishes sufficient conditions for the nonsingularity of the matrix associated with two T-systems and its proof. Then, we show how this lemma can be used to construct a control that steers a given point to a given point for an almost linear control system.

Keywords: Chebyshev system, controllability problem, almost linear control system.

Зміст

Вступ	4
1. Системи функцій Чебишова	5
2. Використання Т-систем для розв'язання задачі керованості	15
Список використаних джерел	20

Вступ

Теорія наближення функцій є однією з базових дисциплін математичного аналізу, яка має широке застосування в науці та техніці. Особливу роль у цій теорії відіграють системи функцій із специфічними властивостями, що забезпечують високу ефективність апроксимації. Одним із найважливіших класів таких систем є Т-системи, що названі на честь видатного математика П.Л. Чебишова [1]. Вони дозволяють не лише ефективно вирішувати класичні проблеми апроксимації, а й створювати нові методи наближення функцій, здійснювати інтерполяцію, будувати сплайни, а також застосовуються при чисельному розв’язанні диференціальних рівнянь. Застосування Т-систем охоплює багато сфер — від обчислювальної математики та автоматичного керування до цифрової обробки сигналів, комп’ютерної графіки та інших напрямів.

У межах цього дослідження ми розглянемо поняття та приклади Т-систем і деякі їх властивості. Зокрема, доведемо одну лему про матрицю, що визначається двома Т-системами. У другому розділі ми покажемо, як можна застосувати цю лему до розв’язання задачі керованості для системи, яка є майже лінійною, тобто всі рівняння якої, крім одного, є лінійними. Ідея такого застосування була запропонована в роботах [2], [3]. Для ілюстрації наведений один приклад побудови керування для тривимірної майже лінійної системи.

Розділ 1

Системи функцій Чебишова

Означення 1.1. [1] Нехай на інтервалі (a, b) задана $n + 1$ неперервна функція

$$g_0(x), \dots, g_n(x), \quad x \in (a, b).$$

Кажуть, що ці функції утворюють систему Чебишова (Т-систему) на інтервалі (a, b) , якщо будь-яка лінійна комбінація

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k g_k(x), \quad (1.1)$$

де числа a_k не всі дорівнюють нулю (тобто $\sum_{k=0}^n a_k^2 > 0$), має не більше n коренів на інтервалі (a, b) .

Нехай задана система функцій $g_0(x), \dots, g_n(x)$, $x \in (a, b)$. Введемо позначення:

$$\Delta \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & \dots & g_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_0(x_n) & g_1(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Лема 1.2. [1] Функції $g_0(x), \dots, g_n(x)$, $x \in (a, b)$, утворюють Т-систему тоді і тільки тоді, коли визначник (1.2) не дорівнює нулю при всіх наборах попарно різних значень $x_0, \dots, x_n$ з інтервала (a, b) .

Приклад 1.3. Класична поліноміальна система.

Розглянемо систему $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ на інтервалі (a, b) . Доведемо, що ця

система є Т-системою.

Доведення. Візьмемо довільну ненульову лінійну комбінацію:

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n,$$

де не всі c_i дорівнюють нулю.

Припустимо, що $p(x)$ має більше ніж n нулів на $[a, b]$. Нехай це точки $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$, де $m > n$. За теоремою Ролля, похідна $p'(x) = c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1}$ має принаймні $m-1 > n-1$ нулів на (a, b) . Застосовуючи теорему Ролля послідовно до похідних вищих порядків, отримуємо, що n -та похідна $p^{(n)}(x) = n! \cdot c_n$ має щонайменше $m-n > 0$ нулів. Але $p^{(n)}(x) = n! \cdot c_n$ є константою і може мати нулі тільки якщо $c_n = 0$. Продовжуючи ці міркування для $p^{(n-1)}(x), \dots, p'(x), p(x)$, отримуємо, що всі коефіцієнти c_i дорівнюють нулю, що суперечить припущенню. Отже, $p(x)$ має щонайбільше n нулів на $[a, b]$, і система $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ є Т-системою.

Альтернативне доведення. Скористаємось лемою 1.2 і розглянемо визначник Δ для точок $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, який для системи $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ є визначником Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

і дорівнює

$$\Delta = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Оскільки $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, то всі множники $(x_j - x_i)$ додатні, і визначник ніколи не дорівнює нулю. Це доводить, що система $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ є Т-

системою на будь-якому інтервалі.

Приклад 1.4. Експоненціальна система.

Розглянемо систему $\{e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$, де $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, на довільному інтервалі (a, b) . Доведемо, що ця система є Т-системою.

Доведення. Будемо застосовувати індукцію за розмірністю.

Якщо $n = 0$, немає чого доводити.

Нехай ми вже довели, що будь-який набір з n експонент з різними показниками утворює Т-систему. Розглянемо набір з $n + 1$ експонент з різними показниками $\{e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$, де $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Розглянемо ненульову лінійну комбінацію:

$$p(x) = c_0 e^{\lambda_0 x} + c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x},$$

де $\sum_{k=0}^n c_k^2 > 0$. Винесемо за дужки множник $e^{\lambda_0 x}$, який не дорівнює 0:

$$p(x) = e^{\lambda_0 x} (c_0 + c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} + \dots + c_n e^{(\lambda_n - \lambda_0)x}).$$

Тоді кількість коренів цієї функції дорівнює кількості коренів функції

$$\hat{p}(x) = c_0 + c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} + \dots + c_n e^{(\lambda_n - \lambda_0)x}.$$

Нехай ця функція має щонайменше $n + 1$ корінь на інтервалі (a, b) , тоді за теоремою Ролля її похідна має щонайменше n коренів на інтервалі (a, b) .

Але

$$\begin{aligned} \hat{p}'(x) &= c_1(\lambda_1 - \lambda_0)e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} + \dots + c_n(\lambda_n - \lambda_0)e^{(\lambda_n - \lambda_0)x} = \\ &= c'_1 e^{\lambda'_1 x} + \dots + c'_n e^{\lambda'_n x}, \end{aligned}$$

де $\lambda'_i = \lambda_i - \lambda_0$ різні, а

$$\sum_{k=1}^n (c'_k)^2 = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_0)^2 c_k^2 > 0.$$

Отже, ненульова лінійна комбінація n експонент з різними показниками має щонайменше n коренів. Але це суперечить припущенню індукції.

Приклад 1.5. Тригонометрична система на обмеженому інтервалі.

Розглянемо систему $\{1, \cos x, \sin x\}$ на інтервалі $(0, 2\pi)$. Доведемо, що ця система є Т-системою.

Доведення. Скористаємось лемою 1.2 і розглянемо визначник Δ для точок $0 < x_0 < x_1 < x_2 < 2\pi$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 \\ 1 & \cos x_2 & \sin x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\cos x_1 - \cos x_0) & (\sin x_1 - \sin x_0) \\ (\cos x_2 - \cos x_0) & (\sin x_2 - \sin x_0) \end{vmatrix} = \\ &= (\cos x_1 - \cos x_0)(\sin x_2 - \sin x_0) - (\sin x_1 - \sin x_0)(\cos x_2 - \cos x_0) = \\ &= -4 \sin \frac{x_1 + x_0}{2} \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \sin \frac{x_2 - x_0}{2} \cos \frac{x_2 + x_0}{2} + \\ &\quad + 4 \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2} \sin \frac{x_2 + x_0}{2} \sin \frac{x_2 - x_0}{2} = \\ &= -4 \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \sin \frac{x_2 - x_0}{2} \times \\ &\quad \times \left(\sin \frac{x_1 + x_0}{2} \cos \frac{x_2 + x_0}{2} - \cos \frac{x_1 + x_0}{2} \sin \frac{x_2 + x_0}{2} \right) = \\ &= 4 \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \sin \frac{x_2 - x_0}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки $0 < x_0 < x_1 < x_2 < 2\pi$, то всі різниці $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $x_2 - x_1$ лежать в інтервалі $(0, 2\pi)$, і, отже,

$$\frac{x_1 - x_0}{2}, \frac{x_2 - x_0}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2} \in (0, \pi).$$

Отже, значення $\sin \frac{x_i - x_j}{2}$ додатні для всіх $i > j$. Таким чином, визначник завжди додатний і не дорівнює нулю.

Отже, система $\{1, \cos x, \sin x\}$ є Т-системою на $(0, 2\pi)$.

Зауваження. Ця система не є Т-системою на більш широкому інтервалі $(-\pi, 3\pi)$, оскільки для точок $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$, $x_2 = 2\pi$ визначник дорівнює нулю, що легко перевірити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos 0 & \sin 0 \\ 1 & \cos \pi & \sin \pi \\ 1 & \cos 2\pi & \sin 2\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 1.6. Контрприклад: система, що не є Т-системою.

Розглянемо систему $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\}$ на інтервалі $(0, 2\pi)$. Доведемо, що ця система не є Т-системою.

Доведення. Розглянемо таку лінійну комбінацію: $f(x) = \sin x - \sin 3x$. Знайдемо нулі цієї функції на $(0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x - \sin 3x = \sin x - (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = \\ &= \sin x(1 - 3 + 4 \sin^2 x) = \sin x(4 \sin^2 x - 2). \end{aligned}$$

Отже, на інтервалі $(0, 2\pi)$ функція $f(x)$ має нулі в точках:

- $x = \pi$ (коли $\sin x = 0$),
- $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (коли $\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Таким чином, $f(x)$ має 5 нулів на інтервалі $(0, 2\pi)$, що перевищує максимально допустимі 2 нулі для Т-системи порядку 2. Отже, система $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\}$ не є Т-системою на інтервалі $(0, 2\pi)$.

Сформулюємо властивість Т-систем, яка знадобиться в подальшому.

Лема 1.7. [1] Нехай функції $g_0(x), \dots, g_n(x)$ утворюють T -систему на інтервалі (a, b) . Нехай $a < x_1 < \dots < x_j < b$, де $0 \leq j \leq n$. Тоді існує нетривіальний набір чисел $c_0, \dots, c_n$ такий, що функція

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k g_k(x)$$

має своїми коренями на (a, b) лише числа $x_1 < \dots < x_j$, причому змінює свій знак при переході через кожен з цих точок.

Приклад 1.8. Розглянемо T -систему $\{1, x, x^2\}$ на інтервалі (a, b) . Зафіксуємо дві точки на цьому інтервалі, $a < x_1 < x_2 < b$. Тоді існує поліном $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$, для якого $p(x_1) = p(x_2) = 0$. Можна вибрати, наприклад, $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Очевидно, що $p(x)$ змінює свій знак при переході через кожен з точок x_1 і x_2 .

Тепер зафіксуємо одну точку на інтервалі, $a < x_1 < b$. Виберемо поліном $p(x) = x - x_1$, який має вигляд $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ при $c_0 = -x_1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Очевидно, що він має лише корінь x_1 і змінює свій знак при переході через цю точку.

Нарешті, існує поліном, який не має коренів на інтервалі (a, b) , наприклад, $p(x) = 1$.

Приклад 1.9. Розглянемо T -систему $\{1, \sin x, \cos x\}$ на інтервалі $(0, 2\pi)$. Зафіксуємо дві точки на цьому інтервалі, $0 < x_1 < x_2 < 2\pi$. Побудуємо поліном $p(x) = c_0 + c_1 \sin x + c_2 \cos x$, для якого $p(x_1) = p(x_2) = 0$. Такий поліном визначається з точністю до константи і дорівнює

$$p(x) = C \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin x_1 & \cos x_1 \\ 1 & \sin x_2 & \cos x_2 \end{vmatrix}.$$

Якщо розкрити визначник, отримуємо

$$p(x) = -C(\sin(x - x_1) - \sin(x - x_2) + \sin(x_1 - x_2)), \quad (1.3)$$

отже, легко перевірити, що $p(x_1) = p(x_2) = 0$. Зокрема, якщо $x_1 = \pi$, то

$$p(x) = C(\sin x + \sin(x - x_2) - \sin x_2).$$

Тепер зафіксуємо одну точку на інтервалі, $0 < x_1 < 2\pi$. Якщо $x_1 = \pi$, то розглянемо поліном $p(x) = C \sin x$: він має лише корінь $x = \pi$ на інтервалі $(0, 2\pi)$ і змінює свій знак при переході через цю точку.

Нехай $x_1 \neq \pi$. Щоб отримати поліном, який має лише один корінь на інтервалі $(0, 2\pi)$, перейдемо до границі $x_2 \rightarrow 2\pi$ у виразі (1.3). Отримуємо

$$\begin{aligned} p(x) &= C(\sin(x - x_1) - \sin x + \sin x_1) = \\ &= 4C \sin \frac{x - x_1}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x_1}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки $x, x_1 \in (0, 2\pi)$, то $\frac{x}{2}, \frac{x_1}{2} \in (0, \pi)$, тому $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{x_1}{2} > 0$ на інтервалі $(0, 2\pi)$. При цьому $\frac{x - x_1}{2} \in (-\pi, \pi)$, тому $p(x)$ має лише корінь $x = x_1$ на інтервалі $(0, 2\pi)$ і змінює свій знак при переході через корінь.

Для подальшого ми дещо змінимо позначення. Доведемо таку лему.

Лема 1.10. [3] Припустимо, що $\{\delta_i(t)\}_{i=1}^m$ і $\{\gamma_i(t)\}_{i=1}^m$ – це дві T -системи на інтервалі (a, b) . Тоді матриця M з елементами

$$M_{kj} = \int_a^b \delta_k(t) \gamma_j(t) dt, \quad k, j = 1, \dots, m,$$

є невивродженою.

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді існує ненульовий вектор p , для якого $Mp = 0$. Іншими словами, існує нетривіальний набір чисел

$p_1, \dots, p_m$ такий, що

$$\sum_{j=1}^m M_{kj} p_j = \int_a^b \delta_k(t) \sum_{j=1}^m p_j \gamma_j(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

Розглянемо функцію

$$p(t) = \sum_{j=1}^m p_j \gamma_j(t).$$

Оскільки $\{\gamma_i(t)\}_{i=1}^m \in \mathcal{T}$ -системою на інтервалі (a, b) , функція $p(t)$ має не більше ніж $m - 1$ корінь на інтервалі (a, b) , в яких де $p(t)$ змінює знак; позначимо їх як $t_1, \dots, t_s$.

Оскільки $\{\delta_i(t)\}_{i=1}^m$ також $\in \mathcal{T}$ -системою на інтервалі (a, b) , існує нетривіальний набір чисел $q_1, \dots, q_m$ такий, що функція

$$q(t) = \sum_{k=1}^m q_k \delta_k(t)$$

має ті ж самі корені $t_1, \dots, t_s$ і виконується рівність $\text{sign}(q(t)) = \text{sign}(p(t))$ поза коренями $q(t)$ і $p(t)$, що випливає з лема 1.7.

Помножимо k -те рівняння з (1.4) на q_k :

$$M_{kj} p_j q_k = \int_a^b q_k \delta_k(t) \sum_{j=1}^m p_j \gamma_j(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

і просумуємо ці рівняння. Отримуємо

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^m q_k \delta_k(t) \right) \left(\sum_{j=1}^m p_j \gamma_j(t) \right) dt = \int_a^b q(t) p(t) dt = 0.$$

Отже, оскільки $\text{sign}(q(t)) = \text{sign}(p(t))$, маємо $q(t) = p(t) = 0$ для всіх t з інтервалу (a, b) (ми врахували, що $p(t)$ і $q(t)$ є неперервними і мають скінченну кількість нулів), що суперечить нашій побудові.

Приклад 1.11. Нехай $\{\delta_i(t)\}_{i=1}^m$ і $\{\gamma_i(t)\}_{i=1}^m$ – однакові $\mathcal{T}$ -системи на ін-

тервалі $(0, 1)$ і дорівнюють $\{1, t, t^2, \dots, t^{m-1}\}$. Тоді матриця M має елементи

$$M_{kj} = \int_0^1 t^{k+j-2} dt = \frac{1}{k+j-1},$$

тобто

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

є матрицею Гільберта. Вона невироджена, її визначник дорівнює

$$\det(M) = \frac{c_n^4}{c_{2n}}, \quad \text{де } c_n = \prod_{i=1}^{n-1} i!.$$

Приклад 1.12. Розглянемо дві різні Т-системи. Наприклад, нехай $\{\delta_i(t)\}_{i=1}^3 = \{1, t, t^2\}$ і $\{\gamma_i(t)\}_{i=1}^3 = \{1, \sin t, \cos t\}$, які є Т-системами на інтервалі $(0, 2\pi)$ (приклади 1.3 і 1.5).

Тоді матриця M дорівнює

$$M = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} dt & \int_0^{2\pi} \sin t dt & \int_0^{2\pi} \cos t dt \\ \int_0^{2\pi} t dt & \int_0^{2\pi} t \sin t dt & \int_0^{2\pi} t \cos t dt \\ \int_0^{2\pi} t^2 dt & \int_0^{2\pi} t^2 \sin t dt & \int_0^{2\pi} t^2 \cos t dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 2\pi^2 & -2\pi & 0 \\ \frac{8}{3}\pi^3 & -4\pi^2 & 4\pi \end{pmatrix},$$

тобто є невиродженою.

Приклад 1.13. Покажемо, що якщо умови леми порушуються, то матриця M може бути виродженою. Наприклад, розглянемо $\{\delta_i(t)\}_{i=1}^3 = \{\sin t, \sin 2t, \sin 3t\}$, яка не є Т-системою на інтервалі $(0, 2\pi)$ (приклад 1.6), і $\{\gamma_i(t)\}_{i=1}^3 = \{1, \sin t, \cos t\}$, яка є Т-системою на інтервалі $(0, 2\pi)$ (приклад 1.5).

Тоді матриця M має вигляд

$$M = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \sin t dt & \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt & \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt \\ \int_0^{2\pi} \sin 2t dt & \int_0^{2\pi} \sin 2t \sin t dt & \int_0^{2\pi} \sin 2t \cos t dt \\ \int_0^{2\pi} \sin 3t dt & \int_0^{2\pi} \sin 3t \sin t dt & \int_0^{2\pi} \sin 3t \cos t dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто є виродженою.

Нарешті, зауважимо, що умови леми є достатніми, але не є необхідними для того, щоб матриця M була невиродженою. Зокрема, якщо $\{\delta_i(t)\}_{i=1}^m$ і $\{\gamma_i(t)\}_{i=1}^m$ — дві однакові системи лінійно незалежних функцій, але не утворюють Т-систему, то матриця M буде невиродженою, тому що вона дорівнює матриці Грама цієї системи. Наприклад, якщо $\{\delta_i(t)\}_{i=1}^3 = \{\gamma_i(t)\}_{i=1}^3 = \{\sin t, \sin 2t, \sin 3t\}$ на інтервалі $(0, 2\pi)$, то матриця M пропорційна одиничній матриці, $M = \pi I$.

Розділ 2

Використання Т-систем для розв’язання задачі керованості

Розглянемо наступну задачу керованості. Нехай задана система

$$\dot{x} = F(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1,$$

а також заданий інтервал часу $(0, T)$, початкова умова $x(0) = x^0$ і кінцева умова $x(T) = x^1$. Задача полягає в тому, щоб знайти керування $u = u(t)$, яке переводить систему з початкової точки до кінцевої за час T , тобто виконуються умови

$$\dot{x} = F(x, u(t)), \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1.$$

Розглянемо один випадок такої задачі для майже лінійної системи, який є частковим випадком майже лінеаризовної системи, розглянутої в роботах [2], [3]. Нехай система складається з n лінійних рівнянь і одного нелінійного, причому лінійні рівняння утворюють канонічну систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= u, \\ \dot{y} &= f(x, y, u), \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$. Заданий інтервал часу $(0, T)$ і умови

$$\begin{aligned} x(0) &= x^0, & x(T) &= x^1, \\ y(0) &= y^0, & y(T) &= y^1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Задача, як і раніше, полягає в тому, щоб знайти керування $u = u(t)$, яке переводить систему (2.1) з початкової точки до кінцевої за час T .

Застосуємо підхід, що був запропонований у статтях [2], [3], до цієї задачі.

Спочатку розглянемо лінійну частину системи, тобто

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= u. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Розглянемо набір неперервних функцій на інтервалі $(0, T)$

$$\{g_0(t), g_1(t), \dots, g_n(t)\}.$$

Будемо шукати керування, яке переводить лінійну систему (2.3) з початкової точки до кінцевої, у вигляді

$$u(t) = c_0 g_0(t) + \dots + c_n g_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i g_i(t).$$

Підставляючи керування в систему і враховуючи крайові умови, отримуємо

$$-x^0 + e^{-AT}x^1 = \int_0^T e^{-At}bu(t)dt,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для зручності позначимо $d = -x^0 + e^{-AT}x^1$, тоді

$$d = \int_0^T e^{-At}b \sum_{i=0}^n c_i g_i(t) dt. \quad (2.4)$$

Можна показати, що компоненти вектор-функції $e^{-At}b$ дорівнюють $\frac{(-1)^{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!}$, отже, утворюють Т-систему на $(0, T)$. Позначимо $h(t) = e^{-At}b$ і перепишемо (2.4) у вигляді

$$d - c_0 \int_0^T h(t)g_0(t)dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T h(t)g_i(t)dt \right) c_i.$$

Введемо ще позначення $w = - \int_0^T h(t)g_0(t)dt$ і запишемо останню рівність покомпонентно:

$$d_k + c_0 w_k = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T h_k(t)g_i(t)dt \right) c_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Нехай c_0 задана, тоді отримуємо систему лінійних рівнянь відносно $c_1, \dots, c_n$ з матрицею, елементи якої дорівнюють

$$M_{kj} = \int_0^T h_k(t)g_j(t)dt, \quad k, j = 1, \dots, n.$$

Ця система має розв'язок, якщо матриця невироджена. З леми 1.10 випливає, що якщо функції $\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}$ утворюють Т-систему на інтервалі $(0, T)$, то ця умова виконується.

Отже, можна розв'язати систему і знайти $c_1, \dots, c_n$ як функції від c_0 . Потім підставити в останнє рівняння системи (2.1). Ми отримали одне диференціальне рівняння з одним параметром і початковою і кінцевою умовами. Далі можна знаходити значення c_0 , для якого обидві умови виконуються.

Приклад 2.1. Розглянемо систему

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$\dot{y} = 10 \sin(5x_1).$$

Нехай

$$T = 1, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Виберемо функції

$$g_0(t) = t^2, \quad g_1(t) = 1, \quad g_2(t) = t$$

і будемо шукати керування у вигляді

$$u(t) = c_0 t^2 + c_1 + c_2 t.$$

Маємо:

$$d = -x^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \int_0^1 t^3 dt \\ -\int_0^1 t^2 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\int_0^1 t dt & -\int_0^1 t^2 dt \\ \int_0^1 dt & \int_0^1 t dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Оскільки функції $\{1, t\}$ утворюють Т-систему, матриця M має бути не-вироджена. Дійсно, її детермінант дорівнює $\frac{1}{12}$.

Отже, отримали систему рівнянь з невивірженою матрицею. Запишемо

покоординатно:

$$\begin{aligned} -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{3} &= -1 + \frac{c_0}{4}, \\ c_1 + \frac{c_2}{2} &= -1 - \frac{c_0}{3}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи, отримуємо

$$\begin{aligned} c_1 &= -10 + \frac{c_0}{6}, \\ c_2 &= 18 - c_0. \end{aligned}$$

Отже, кожне керування вигляду

$$u(t) = c_0 t^2 - 10 + \frac{c_0}{6} + (18 - c_0)t$$

переводить лінійну систему з початкової точки до кінцевої.

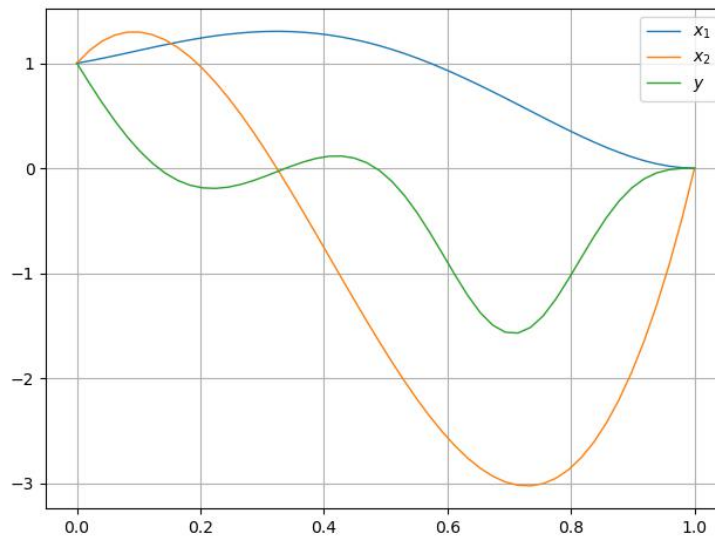
Тепер розглянемо нелінійне рівняння з крайовими умовами

$$\dot{y} = 10 \sin(5x_1(t)), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Функція $x_1(t)$ відома і залежить від c_0 , її можна виписати явно.

Будемо підставляти різні c_0 , щоб знайти таке, що задовольняє крайовим умовам. Якщо знайдемо такі $c'_0 < c''_0$, для яких $y(1)$ має різні знаки, то шукане значення c_0 можна знайти на відрізку $[c'_0, c''_0]$.

Наприклад, при $c_0 \approx 100.6$ отримуємо, що $y(0) = 0$, $y(1) \approx -3.5 \cdot 10^{-5}$.



Список використаних джерел

- [1] M.G. Krein, A.A. Nudelman. The Markov Moment Problem and Extremal Problems. AMS, Trans. Math. Monogr., Vol. 50, 1977.
- [2] V.I. Korobov. Almost linearizable control systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*. 2021. V. 33(3). P. 473–497.
- [3] V.I. Korobov, K.V. Sklyar, S.Yu. Ignatovich. Almost feedback linearizable systems of the class C^1 and solving the constructive controllability problem. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. 2024. V. 41(2). P. 356–377.